Funkcje liczbowe - pojęcie i własności funkcji

Pojęcie funkcji

Począwszy od tego rozdziału, aby skrócić zapis niektórych definicji będziemy używać tzw. kwantyfikatorów. Rozróżniamy dwa ich rodzaje:

- *kwantyfikator ogólny*, który oznaczamy symbolem $\forall$ i czytamy: „dla każdego". Zatem zapis: $\forall_{x\in\mathbb{R}}$, przeczytamy jako: „dla każdego x należącego do zbioru liczb rzeczywistych",
- *kwantyfikator szczegółowy*, który oznaczamy symbolem $\exists$ i czytamy: „istnieje takie". Przykładowo zapis: $\exists_{\delta>0}$, odczytamy jako: „istnieje takie δ większe od 0, że".

Niech X i Y będą dwoma dowolnymi, niepustymi zbiorami liczb.

Definicja 1. Mówimy, że w zbiorze X jest określona pewna *funkcja* f (*funkcja jednej zmiennej*), jeżeli każdej liczbie x ze zbioru X przyporządkowana jest dokładnie jedna liczba y ze zbioru Y.

Funkcję f odwzorowującą zbiór X w zbiór Y oznaczamy

$$f\ :\ X \to Y,$$

a przyporządkowanie elementowi $x \in X$ elementu $y \in Y$ zapisujemy

$$y = f(x), \quad x \in X.$$

Element x nazywamy *argumentem* (*zmienną niezależną*) funkcji *f*, a zbiór X – jej *dziedziną*. W przypadku, gdy dany jest tylko wzór określający funkcję, to zbiór liczb, dla których wzór ten ma sens będziemy nazywać *dziedziną naturalną* funkcji (oznaczenie: D_f).

Element $y = f(x)$ zbioru Y nazywamy *wartością* (*zmienną zależną*) funkcji f dla argumentu x, a zbiór

$$W_f = \{y \in Y : y = f(x) \wedge x \in X\}$$

nazywamy *przeciwdziedziną* (*zbiorem wartości*) tej funkcji.

Podamy teraz prosty przykład ilustrujący na czym polega wyznaczanie dziedziny (naturalnej) funkcji. Więcej przykładów pojawi się po dokonaniu przeglądu wybranych funkcji elementarnych.

Przykład 1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji

$$y = \frac{\sqrt{6-2x}}{x+1} \ .$$

Rozwiązanie. Widzimy, że aby wyrażenie występujące po prawej stronie znaku równości miało sens liczbowy, to spełnione muszą być dwa następujące warunki:

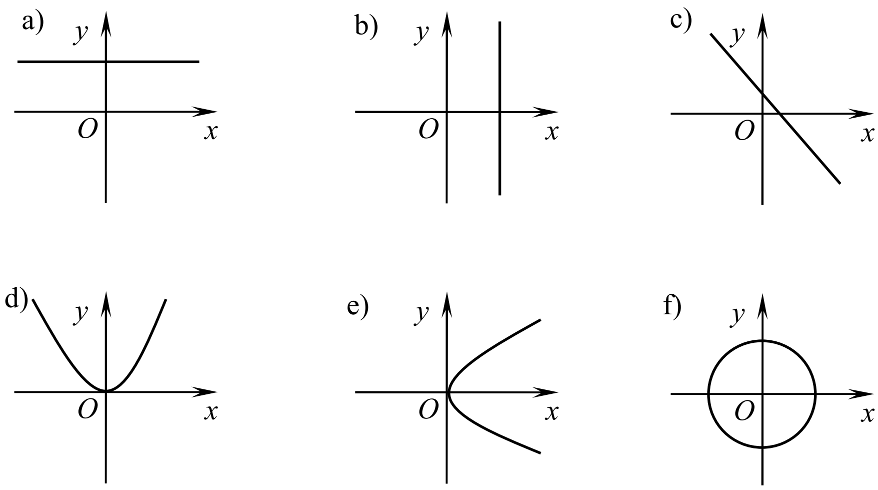
1) $x+1 \neq 0$, 2) $6-2x \geq 0$.

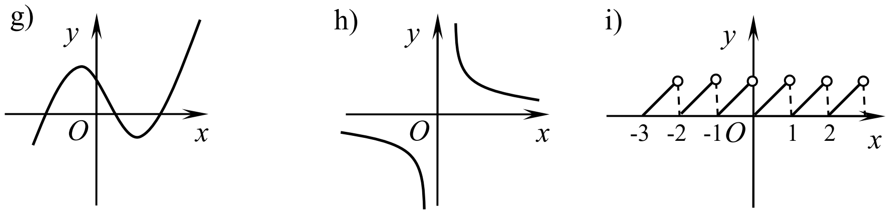
Z warunku pierwszego otrzymujemy, że $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, natomiast z drugiego: $x \in (-\infty, 3\rangle$. Wyznaczając część wspólną obydwu zbiorów stwierdzamy, że dziedziną danej funkcji będzie: $D_f = (-\infty, 3\rangle \setminus \{-1\}$.

Wykresem funkcji f będziemy nazywać zbiór tych wszystkich punktów (x, y) płaszczyzny *Oxy*, których współrzędne spełniają warunki: $x \in X$, $y = f(x)$.

Uwaga. Z definicji funkcji wynika, że dana krzywa (czy ogólniej zbiór punktów płaszczyzny) jest wykresem pewnej funkcji, jeżeli każda prosta równoległa do osi *Oy* przecina tę krzywą co najwyżej w jednym punkcie.

Przykład 2. Które rysunki przedstawiają wykresy funkcji?





Rys. 1. Ilustracja do przykładu 2

Rozwiązanie. Łatwo stwierdzić, że krzywe przedstawione na rysunkach: b), e) i f) nie są wykresami funkcji. Przykładowo istnieje prosta równoległa do osi *Oy*, która przetnie krzywą przedstawioną na rysunku 1e) w dwóch punktach, co przeczy warunkowi zawartemu w definicji funkcji, że każdemu elementowi x ze zbioru X musi być przyporządkowany dokładnie jeden element y ze zbioru Y.

Podstawowe własności funkcji

Definicja 2. Jeżeli $W_f = Y$, to mówimy, że funkcja f odwzorowuje zbiór X *na* zbiór Y i zapisujemy

$$f \,:\, X \overset{na}{\to} Y.$$

Przykładowo, aby funkcja, której wykres przedstawiono na rysunku 1d), była „na", to musielibyśmy przy jej określaniu zastrzec, że odwzorowuje ona zbiór $\mathbb{R}$ w przedział $\langle 0, +\infty)$, czyli

$$f \,:\, \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty).$$

Definicja 3. Mówimy, że funkcja $f \,:\, X \to Y$ jest *różnowartościowa* w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy różnym argumentom $x_1, x_2 \in X$ odpowiadają różne wartości $f(x_1)$ i $f(x_2)$, tzn.

$$\forall_{x_1, x_2 \in X} \left[x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \right].$$

Uwaga. Wykres funkcji różnowartościowej ma co najwyżej jeden punkt wspólny z dowolną prostą równoległą do osi *Ox*.

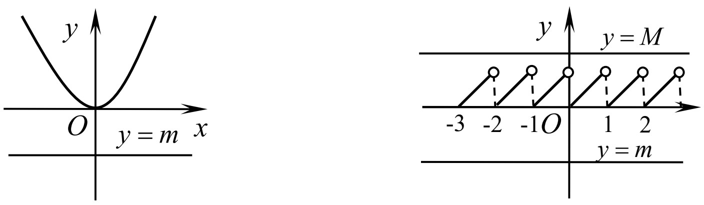
Korzystając z powyższej uwagi łatwo stwierdzić, że spośród funkcji, których wykresy przedstawiono na rysunku 1, różnowartościowe są jedynie funkcje zilustrowane na rysunkach c) i h). Dla przykładu, funkcja o wykresie z rysunku g) nie jest różnowartościowa, gdyż łatwo poprowadzić prostą równoległą do osi Ox, która przetnie jej wykres w trzech punktach.

Definicja 4. Mówimy, że funkcja $f : X \to Y$ jest w zbiorze X:

- *ograniczona z dołu* $\Leftrightarrow \exists_{m \in \mathbb{R}} \forall_{x \in X} \; f(x) \geq m$,
- *ograniczona z góry* $\Leftrightarrow \exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{x \in X} \; f(x) \leq M$,
- *ograniczona* $\Leftrightarrow \exists_{m,M \in \mathbb{R}} \forall_{x \in X} \; m \leq f(x) \leq M$.

Uwaga. Wykres funkcji ograniczonej z dołu (z góry) leży powyżej (poniżej) pewnej prostej $y = m$ ($y = M$) równoległej do osi Ox. Wykres funkcji ograniczonej leży pomiędzy dwiema prostymi ($y = m$ i $y = M$) równoległymi do osi Ox.

Spośród funkcji, których wykresy przedstawiono na rysunku 1, funkcje zilustrowane na rysunku a) oraz i) są ograniczone z dołu i z góry, natomiast funkcja z rysunku 2d) jest ograniczona tylko z dołu. Uzasadnienie tych faktów (dla przykładu 1d) oraz 1i)) można znaleźć na rysunku 2.



Rys. 2. Ilustracja pojęcia ograniczoności funkcji

Definicja 4. Mówimy, że funkcja $f : X \to Y$ jest w zbiorze X:

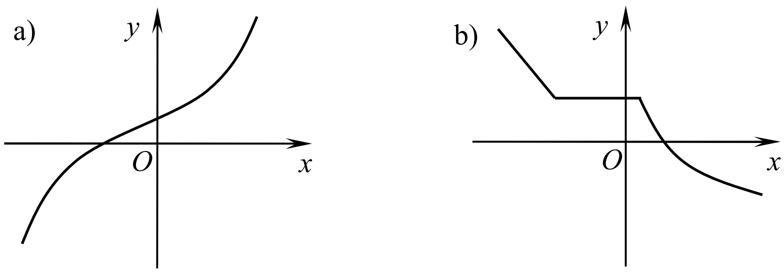
- *rosnąca* $\Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in X} \left[x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \right]$,
- *malejąca* $\Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in X} \left[x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \right]$,
- *niemalejąca* $\Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in X} \left[x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \right]$,
- *nierosnąca* $\Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in X} \left[x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \right]$,
- *stała* $\Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in X} \left[x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \right]$.

Funkcje rosnące, malejące, niemalejące i nierosnące nazywamy *monotonicznymi*. W szczególności, funkcje malejące i rosnące przyjęto również nazywać funkcjami *ściśle monotonicznymi*. Często mamy do czynienia z funkcjami, które nie są monotoniczne w całej swojej dziedzinie, lecz dla których można wskazać przedziały, w których są one monotoniczne. O takich funkcjach mówimy, że są *przedziałami monotoniczne.*

Analizując monotoniczność funkcji o wykresach przedstawionych na rysunku 1 można stwierdzić, co następuje:

a) – funkcja stała,
c) – funkcja malejąca,
d) – funkcja przedziałami monotoniczna,
g) – funkcja przedziałami monotoniczna,
h) – funkcja przedziałami malejąca,
i) – funkcja przedziałami rosnąca.

Dodatkowo na rysunku 3 można znaleźć przykładowe wykresy funkcji rosnącej oraz nierosnącej.



Rys. 3. Przykład funkcji: a) rosnącej, b) nierosnącej

Definicja 5. Mówimy, że funkcja $f : X \to Y$ jest w zbiorze X:

- *parzysta* $\Leftrightarrow \forall_{x\in X} \left[-x \in X \wedge f(-x) = f(x)\right]$,
- *nieparzysta* $\Leftrightarrow \forall_{x\in X} \left[-x \in X \wedge f(-x) = -f(x)\right]$.

Uwaga. Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi *Oy*, natomiast funkcji nieparzystej – symetryczny względem początku układu współrzędnych.

Korzystając z powyższej uwagi łatwo stwierdzić, że spośród funkcji, których wykresy przedstawiono na rysunku 1 parzyste są funkcje zilustrowane na rysunkach a) i d), nieparzysta jest funkcja z rysunku h), a pozostałe funkcje nie są ani parzyste, ani nieparzyste.

Przykład 3. Zbadać parzystość funkcji:

a) $f(x) = \dfrac{2x^4}{1-x^2}$, b) $f(x) = x^3 + \sin x$.

Rozwiązanie.

a) Dziedziną funkcji jest $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$. Łatwo zatem stwierdzić, że dla każdego $x \in D_f$ mamy: $-x \in D_f$ (z definicji funkcji zarówno parzystej, jak i nieparzystej wynika, że dziedzina funkcji musi być zbiorem symetrycznym względem zera).
Ponadto, dla każdego $x \in D_f$ mamy

$$f(-x) = \frac{2(-x)^4}{1-(-x)^2} = \frac{2x^4}{1-x^2} = f(x).$$

Dana funkcja jest więc w swojej dziedzinie parzysta.

b) Dziedziną funkcji jest $D_f = \mathbb{R}$, zatem jest ona zbiorem symetrycznym względem zera. Dodatkowo

$$f(-x) = (-x)^3 + \sin(-x) = -x^3 - \sin x = -(x^3 + \sin x) = -f(x).$$

Badana funkcja jest więc nieparzysta w zbiorze $\mathbb{R}$.

Definicja 6. Mówimy, że funkcja $f : X \to Y$ jest *okresowa* w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\exists_{T\neq 0}\forall_{x\in X}\ \left[(x+T)\in X \wedge f(x+T) = f(x)\right].$$

Liczbę T nazywamy *okresem* funkcji *f*, natomiast najmniejszy dodatni okres – *okresem podstawowym* funkcji f i oznaczamy symbolem T_0.

Spośród funkcji z rysunku 1, okresowa jest jedynie funkcja o wykresie przedstawionym na rysunku i). Okresem podstawowym tej funkcji jest $T = 1$.

Przykład 4. Wyznaczyć okres podstawowy funkcji:

a) $f(x) = \cos 3x$, b) $f(x) = 5\,\mathrm{tg}\pi x$.

Rozwiązanie.

a) Dziedziną funkcji jest $D_f = \mathbb{R}$, zatem dla każdego $x \in D_f$ oraz dla każdego T spełniony jest warunek: $(x+T) \in D_f$. Z definicji 6 wiemy, że aby funkcja była okresowa musi istnieć takie $T \neq 0$, że: $f(x+T) = f(x)$. Ponieważ $f(x) = \cos 3x$ oraz $f(x+T) = \cos 3(x+T) = \cos(3x+3T)$, zatem spełniona musi być równość:

$$\cos(3x+3T) = \cos 3x.$$

Wiemy, że funkcja cosinus jest funkcją okresową z okresem podstawowym 2π. Oznacza to, że jej wartości są równe dla argumentów różniących się od siebie o wielokrotność 2π. Powyższa równość jest zatem równoważna następującej równości:

$$3x + 3T = 3x + 2k\pi \ , \ \ k \in \mathbb{C} \, .$$

Stąd

$$T = \frac{2}{3} k\pi \ .$$

Ostatecznie okresem podstawowym, jako najmniejszym dodatnim okresem będzie:

$$T_0 = \frac{2}{3}\pi \, .$$

b) Postępujemy podobnie, jak w przykładzie a). Dziedziną funkcji jest $D_f = \mathbb{R}$, zatem pierwszy warunek definicji jest spełniony. Wyznaczamy:

$$f(x+T) = 5\operatorname{tg}\pi(x+T) = 5\operatorname{tg}(\pi x + \pi T) \, .$$

Z drugiego warunku funkcji okresowej spełniona musi być równość:

$$5\operatorname{tg}(\pi x + \pi T) = 5\operatorname{tg}\pi x \, .$$

Ponieważ okresem podstawowym funkcji tangens jest π, zatem:

$$\pi x + \pi T = \pi x + k\pi \, ,$$

a stąd $T = k$. Więc okresem podstawowym będzie: $T_0 = 1$.

Funkcja odwrotna i funkcja złożona

Niech dana będzie różnowartościowa funkcja $f : X \xrightarrow{na} Y$. Wówczas każdemu elementowi $y \in Y$ można przyporządkować dokładnie jeden element $x \in X$, dla którego $y = f(x)$. To przyporządkowanie będziemy nazywać *funkcją odwrotną* do funkcji f i symbolicznie oznaczać przez f^{-1}. Możemy zapisać:

Definicja 7. *Funkcją odwrotną* względem różnowartościowej funkcji $f : X \xrightarrow{na} Y$ nazywamy taką funkcję $f^{-1} : Y \xrightarrow{na} X$, że

$$\forall_{y \in Y} \left[x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x) \wedge x \in X \right].$$

Uwaga.

1. Aby znaleźć wzór funkcji odwrotnej do funkcji f należy we wzorze $y = f(x)$ tej funkcji zamienić ze sobą zmienne, a następnie z otrzymanej równości wyznaczyć y.

2. Wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = f^{-1}(x)$ są symetryczne do siebie względem prostej $y = x$.

Przykład 5. Znaleźć funkcję odwrotną do funkcji

$$y = 2x - 3$$

oraz sporządzić wykresy obydwu funkcji.

Rozwiązanie. Dana funkcja jest funkcją różnowartościową i odwzorowuje zbiór $\mathbb{R}$ na zbiór $\mathbb{R}$, istnieje zatem funkcja do niej odwrotna. W celu wyznaczenia tej funkcji, zgodnie z punktem 1 powyższej uwagi, zamieniamy ze sobą zmienne, a następnie z otrzymanego równania wyznaczamy y:

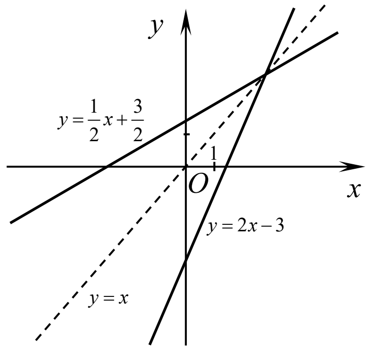
$y = 2x - 3 \leftarrow f$

$x = 2y - 3$,

$2y = x + 3 \;\; / : 2$

$y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2} \leftarrow f^{-1}$.

Sporządzamy wykresy obydwu funkcji (rysunek 4). Zauważmy, że otrzymane wykresy są symetryczne względem prostej $y = x$.



Rys. 4. Ilustracja do przykładu 5

Definicja 8. Niech dane będą funkcje $g : X \to U$ i $f : U \to Y$, takie że przeciwdziedzina funkcji g zawiera się w dziedzinie funkcji f. Funkcję $h : X \to Y$ określoną wzorem

$$h(x) = f(g(x))$$

nazywamy *złożeniem funkcji* f i g (często oznaczamy ją symbolem $f \circ g$), przy czym funkcję g nazywamy funkcją *wewnętrzną*, a f – *zewnętrzną*. Analogicznie określa się złożenia większej liczby funkcji.

Przykład 6. Wskazać funkcję wewnętrzną i zewnętrzną funkcji:

a) $y = \sqrt[3]{x^2 + 5}$, b) $y = \sin^2 x$.

Rozwiązanie.

a) Funkcją wewnętrzną funkcji $y=\sqrt[3]{x^2+5}$ jest funkcja $u=x^2+5$, natomiast zewnętrzną $y=\sqrt[3]{u}$.

b) W tym przypadku funkcją wewnętrzną jest funkcja $u=\sin x$, a zewnętrzną $y=u^2$.

Przykład 7. Wyznaczyć wzór funkcji złożonej $h(x)=f(g(x))$ oraz $k(x)=g(f(x))$, jeżeli:

a) $f(x)=2x-3$, $g(x)=\mathrm{ctg}\, x$, b) $f(x)=\ln x$, $g(x)=x^3$.

Rozwiązanie.

a) $h(x)=f(g(x))=f(\mathrm{ctg} x)=2\mathrm{ctg}\, x-3$,

$k(x)=g(f(x))=g(2x-3)=\mathrm{ctg}(2x-3)$.

b) $h(x)=f(g(x))=f(x^3)=\ln x^3$,

$k(x)=g(f(x))=g(\ln x)=\ln^3 x$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zbadać parzystość funkcji:

1. $f(x)=x^4-3x^2+1$,

2. $g(u)=u^2-u^3$,

3. $f(x)=\ln^3 x$,

4. $f(x)=\dfrac{x^3+5x}{x^2-9}$,

5. $f(x)=x\cos x$,

6. $f(x)=|\sin x|$,

7. $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$,

8. $f(x)=\dfrac{3\mathrm{tg}\, x}{\sin^2 x+6}$,

9. $f(x)=\sin^3 x+2\cos x$,

10. $f(x)=\log\dfrac{1-x}{1+x}$.

Wyznaczyć okres podstawowy funkcji:

11. $f(x)=\sin 2x$,

12. $f(x)=\cos\dfrac{x}{4}$,

13. $f(x)=\sin \pi x$,

14. $f(x)=\cos(x+1)$,

15. $f(x) = \mathrm{ctg}\dfrac{\pi x}{2}$,

16. $f(x) = \sin^2 x$.

Znaleźć funkcję odwrotną do podanej funkcji:

17. $y = -2x + 1$,

18. $y = \dfrac{x+1}{x-3}$,

19. $y = 3^{x+1}$,

20. $y = \log_2(x-1) - 2$.

Wyznaczyć wzór funkcji złożonej $h(x) = f(g(x))$ oraz $k(x) = g(f(x))$, jeżeli:

21. $f(x) = 2x + 3,\ g(x) = x^2 + 3x$,

22. $f(x) = \sin x,\ g(x) = x^2$,

23. $f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = \cos x$,

24. $f(x) = x^2 + 2x + 3,\ g(x) = 2^x$,

25. $f(x) = x^2 + 4,\ g(x) = \ln x$,

27. $f(x) = |\sin x|,\ g(x) = \ln(x+1)$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch